

2025

MATHEMATICS — MINOR

Paper : MN-1

(Calculus, Geometry and Vector Analysis)

Full Marks : 75

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

বিভাগ - ক

[Calculus]

(Marks : 20)

১। যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

২×৪

(ক) মান নির্ণয় করো : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ ।

(খ) $y = x^{\sinh x}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ -এর মান নির্ণয় করো।

(গ) $f(x) = kx - \sin x$ একটি বর্ধিষ্ণু অপেক্ষক হলে k -এর মানগুলি নির্ণয় করো।

(ঘ) যদি $y = Ae^{kx} + Be^{-kx}$ হয়, দেখাও যে, $y_2 + k^2 y = 0$, যেখানে A, B এবং k ধ্রুবক।

(ঙ) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx = \frac{1}{n-1} I_{n-2}$ -এই Reduction formula ব্যবহার করে $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^5 x \, dx$ -এর মান নির্ণয় করো।

(চ) যুগ্ম সমাকলন-এর সাহায্যে r -ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

(ছ) দেখাও যে, $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তটির পরিধির দৈর্ঘ্য 6π (কলনবিদ্যার সাহায্যে)।

২। যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

৪×৩

(ক) 'a' এবং 'b'-এর মান নির্ণয় করো যার জন্য $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + a \cos x) - b \sin x}{x^3} = 1$ হয়।

(খ) যদি $y = \tan^{-1} x$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $(1 + x^2)y_{n+1} + 2nxy_{n+1} + n(n-1)y_{n-1} = 0$ ।

(গ) $\int \sin^n x \, dx$ -এর Reduction formula কী লেখো ও তার সাহায্যে $\int \sin^4 x \, dx$ -এর মান নির্ণয় করো।

Please Turn Over

(5678)

(ঘ) $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2t}{1+t^2}$ -এই বক্রটির পরিধির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

(ঙ) $y^2 = 4x$ অধিবৃত্ত এবং এর নাভিলম্বের দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

(চ) X -অক্ষকে অক্ষ করে $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ বক্ররেখার ঘূর্ণন সৃষ্ট ঘন (solid)-এর আয়তন নির্ণয় করো।

বিভাগ - খ

[Geometry]

(Marks : 35)

৩। যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

$2\frac{1}{2} \times 2$

(ক) $(-1, 2)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত সমান্তরাল অক্ষদ্বয়ের সাপেক্ষে $9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y = 11$ বক্রটির পরিবর্তিত সমীকরণটি নির্ণয় করো।

(খ) $\frac{5}{r} = 3 + 6\cos\theta$ শঙ্কুটির প্রকৃতি নির্ণয় করো এবং এর নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

(গ) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 2 = 0$ গোলকটির কেন্দ্রবিন্দু ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।

(ঘ) যে বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$, তার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় করো।

৪। যে-কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

6×5

(ক) $4x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 6y + 5 = 0$ সমীকরণটিকে তার canonical রূপে পরিবর্তিত করো এবং সেখান থেকে Conic-টির প্রকৃতি নির্ণয় করো।

(খ) $r \cos(\theta - \alpha) = p$ সরলরেখাটি যদি $\frac{l}{r} = 1 + \cos\theta$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে, তবে দেখাও যে $p = \frac{l \sec \alpha}{2}$ ।

(গ) $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তটির দুটি পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত স্পর্শকদ্বয়ের ছেদবিন্দুর সম্মিলিত সঞ্চারণপথের সমীকরণ নির্ণয় করো।

(ঘ) মূল বিন্দুগামী গোলকটি স্থানাঙ্ক-অক্ষগুলিকে যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করে। OABC চতুস্তলক (Tetrahedron)-এর আয়তন K হলে গোলকের কেন্দ্রের সম্মিলিত সঞ্চারণপথের সমীকরণ নির্ণয় করো।

(ঙ) একটি লম্ববৃত্তীয় শঙ্কুর সমীকরণ নির্ণয় করো, যার শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দুতে অবস্থিত, যার অক্ষ-এর সমীকরণ $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ এবং যার অর্ধ-উল্লম্ব কোণ 30° ।

(চ) যে Cylinder-এর generator গুলি $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{3}$ সরলরেখার সমান্তরাল এবং নির্দেশক বক্ররেখা $4x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ তার সমীকরণ নির্ণয় করো।

- (ছ) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ —এই hyperboloid-টির generating সরলরেখাগুলির সমীকরণ নির্ণয় করো, যেটি (2, 3, -4) বিন্দু দিয়ে গমন করে।
- (জ) একটি লম্ব-বৃত্তীয় নলের সমীকরণ নির্ণয় করো, যার ব্যাসার্ধ 10 একক এবং যার অক্ষ (1, 2, 3) বিন্দুগামী ও $\frac{x-5}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-7}{2}$ সরলরেখার সমান্তরাল।
- (ঝ) দেখাও যে $3x^2 - y^2 - z^2 + 6yz - 6x + 6y - 2z - 2 = 0$ সমীকরণটি একটি central conicoid হবে। এটির কেন্দ্র নির্ণয় করো।

বিভাগ - গ

[Vector Analysis]

(Marks : 20)

৫। যে-কোনো চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

২×৪

- (ক) $x\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$, $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরগুলি একতলীয় হলে, x -স্কেলারটির মান নির্ণয় করো।
- (খ) $3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টরের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ লেখো যা $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ বিন্দুগামী।
- (গ) $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ এবং $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2$ হলে $\vec{\alpha} \times \vec{\beta}$ -এর মান নির্ণয় করো।
- (ঘ) $2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণের পরিমাপ করো।
- (ঙ) $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ দুটি ভেক্টর এবং k যদি স্কেলার হয়, তবে সেই সমস্ত ভেক্টর $\vec{r}$ নির্ণয় করো, যেখানে $\vec{a} \times \vec{r} = \vec{b}$ এবং $\vec{a} \cdot \vec{r} = k$ ।

(চ) মান নির্ণয় করো, $\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|$, যেখানে, $\vec{r} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$ ।

(ছ) প্রমাণ করো যে, কোনো একটি ভেক্টর $\vec{\alpha}$ -এর জন্য,

$$\hat{i} \times (\vec{\alpha} \times \hat{i}) + \hat{j} \times (\vec{\alpha} \times \hat{j}) + \hat{k} \times (\vec{\alpha} \times \hat{k}) = 2\vec{\alpha} \text{।}$$

৬। যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

৪×৩

- (ক) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ করো, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, যেখানে $\triangle ABC$ একটি ত্রিভুজ।
- (খ) (2, -1, 1), (3, 2, -1) এবং (-1, 3, 2) বিন্দুগামী সমতলের ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করো।
- (গ) একটি কণার উপর $2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ এবং $3\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ স্কেলার বলদুটি প্রযুক্ত হলে, কণাটি A(1, 3, 2) বিন্দু থেকে B(4, 5, -1) বিন্দুতে স্থানান্তরিত হয়। তাহলে কণাটির উপর বলের কার্য নির্ণয় করো।

Please Turn Over

(5678)

(ঘ) প্রমাণ করো যে, $[\vec{\alpha} + \vec{\beta} \quad \vec{\beta} + \vec{\gamma} \quad \vec{\gamma} + \vec{\alpha}] = 2[\vec{\alpha} \quad \vec{\beta} \quad \vec{\gamma}]$ ।

(ঙ) একটি কণা $x = 2t^2$, $y = t^2 - 4t$, $z = 3t - 5$ বক্ররেখা বরাবর গতিশীল। তাহলে সময় যখন $t = 1$, কণার গতিবেগ ও ত্বরণের components গুলি $(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ ভেক্টরের অভিমুখে নির্ণয় করো।

(চ) $\vec{A} = 5t^2\hat{i} + t\hat{j} - t^3\hat{k}$ এবং $\vec{C} = (\sin t)\hat{i} - (\cos t)\hat{j}$ হলে $\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{C})$ নির্ণয় করো।

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Group - A

[Calculus]

(Marks : 20)

1. Answer *any four* questions :

2×4

(a) Find the value of $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

(b) Find $\frac{dy}{dx}$ when $y = x^{\sinh x}$.

(c) Find the values of k for which the function $f(x) = kx - \sin x$ increases.

(d) If $y = Ae^{kx} + Be^{-kx}$, then show that $y_2 + k^2y = 0$, where A , B and k are constants.

(e) Evaluate $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^5 x \, dx$, using the reduction formula : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx = \frac{1}{n-1} I_{n-2}$.

(f) Find by the method of double integral, the area of a circle of radius r .

(g) Show that the length of the circumference of the circle $x^2 + y^2 = 9$ is 6π (using calculus).

2. Answer *any three* questions :

4×3

(a) Find the values of a and b in order that $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + a \cos x) - b \sin x}{x^3} = 1$.

(b) If $y = \tan^{-1}x$, then show that $(1 + x^2)y_{n+1} + 2nxy_{n+1} + n(n-1)y_{n-1} = 0$.

(c) Write down the Reduction formula for $\int \sin^n x \, dx$, hence evaluate $\int \sin^4 x \, dx$.

- (d) Find the length of perimeter of the curve given by $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2t}{1+t^2}$.
- (e) Find the area of the region bounded by the parabola $y^2 = 4x$ and its latus rectum.
- (f) Find the volume of the solid generated by revolution of the curve $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ about the X -axis.

Group - B**[Geometry]****(Marks : 35)**3. Answer *any two* questions :

2½×2

- (a) Find the transformed equation of the curve $9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y = 11$ referred to parallel axes through the point $(-1, 2)$.
- (b) Determine the nature of the conic $\frac{5}{r} = 3 + 6\cos\theta$ and also find the length of its latus rectum.
- (c) Find the centre and radius of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 2 = 0$.
- (d) Find the rectangular Cartesian coordinates of the point whose polar coordinate is $\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$.

4. Answer *any five* questions :

6×5

- (a) Reduce the equation $4x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 6y + 5 = 0$ to its canonical form and hence determine the nature of the conic.
- (b) If the straight line $r \cos(\theta - \alpha) = p$ touches the parabola $\frac{l}{r} = 1 + \cos\theta$, show that $p = \frac{l \sec \alpha}{2}$.
- (c) Find the equation of the locus of the points of intersection of mutually perpendicular tangents to the circle $x^2 + y^2 = r^2$.
- (d) A sphere passes through the origin and meets the coordinate axes at A, B, C so that the volume of the tetrahedron OABC is K. Find the locus of the centre of the sphere.
- (e) Find the equation of the right circular cone whose vertex is the origin, whose axis is the line $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ and which has semi-vertical angle of 30° .
- (f) Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to the line $\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{3}$ and the guiding curve is $4x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

Please Turn Over**(5678)**

- (g) Find the equations of the generating lines of the hyperboloid $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ passing through the point $(2, 3, -4)$.
- (h) Find the equation of the right circular cylinder whose radius is 10 units, axis passes through the point $(1, 2, 3)$ and is parallel to the straight line $\frac{x-5}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-7}{2}$.
- (i) Show that the equation $3x^2 - y^2 - z^2 + 6yz - 6x + 6y - 2z - 2 = 0$ is a central conicoid. Find its centre.

Group - C

[Vector Analysis]

(Marks : 20)

2×4

5. Answer **any four** questions :

- (a) Find the value of x for which the vectors $x\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$, $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ and $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ are coplanar.
- (b) Find the vector equation of the line passing through the point $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ and parallel to the vector $3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$.
- (c) If $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ and $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2$, find $\vec{\alpha} \times \vec{\beta}$.
- (d) Find the angle between two vectors $2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ and $2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$.
- (e) If $\vec{a}$ and $\vec{b}$ be two vectors and let k be a given scalar, find all vectors $\vec{r}$ such that $\vec{a} \times \vec{r} = \vec{b}$ and $\vec{a} \cdot \vec{r} = k$.
- (f) If $\vec{r} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$, find $\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|$.
- (g) Prove that for any proper vector $\vec{\alpha}$, $\hat{i} \times (\vec{\alpha} \times \hat{i}) + \hat{j} \times (\vec{\alpha} \times \hat{j}) + \hat{k} \times (\vec{\alpha} \times \hat{k}) = 2\vec{\alpha}$.

6. Answer **any three** questions :

4×3

- (a) Prove by vector method, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ in a triangle ΔABC .
- (b) Find the vector equation of a plane through the three points $(2, -1, 1)$, $(3, 2, -1)$ and $(-1, 3, 2)$.
- (c) A particle, acted on by constant forces $2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ and $3\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ is displaced from the point $A(1, 3, 2)$ to the point $B(4, 5, -1)$. Find the work done by the force on the particle.

(7)

D(1st Sm.)-Mathematics-H/MN-1/CCF

- (d) Prove that $[\vec{\alpha} + \vec{\beta} \quad \vec{\beta} + \vec{\gamma} \quad \vec{\gamma} + \vec{\alpha}] = 2[\vec{\alpha} \quad \vec{\beta} \quad \vec{\gamma}]$.
- (e) A particle move along the curve $x = 2t^2$, $y = t^2 - 4t$, $z = 3t - 5$. Find the components of velocity and acceleration at time $t = 1$, in the direction $(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$.
- (f) If $\vec{A} = 5t^2\hat{i} + t\hat{j} - t^3\hat{k}$ and $\vec{C} = (\sin t)\hat{i} - (\cos t)\hat{j}$, then find $\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{C})$.
-